Аксиоматический метод не является достижением только двадцатого столетия. В начале двадцатого века, благодаря главным образом работам немецкого математика Д. Гильберта (1862-1943), окончательно сформировались принципиальные положения данного метода, и было осознано его значение для математики. А первый шаг на этом пути был сделан более двух тысяч лет тому назад древнегреческим математиком Евклидом (около 300 г. до н. э.). Его труд «Начала» явился энциклопедией геометрических знаний и образцом написания математических работ на протяжении двадцати веков. Именно благодаря этому авторитетнейшему произведению сформировалось общечеловеческое представление об аксиоме как об утверждении, не требующем доказательства и являющем собой некую абсолютную истину.

В наше время в каждом среднем учебном заведении изучается геометрия Евклида. Многие поколения школьников на уроках геометрии знакомятся с понятиями «аксиома», «теорема», «доказательство», а также с образцами безукоризненных логических рассуждений. На пороге третьего тысячелетия очень трудно найти людей, не имеющих представления о системе Евклида. Они настолько редки, что после их обнаружения об этом сразу же сообщают по телевидению в рекламных роликах.

*Параллельные линии не пересекаются, – доказано Евклидом.*

*Надежная бытовая техника существует, – доказано Zanussi.*

*Телевизионная реклама. Сентябрь 2000 г.*

Внутри математической науки общепринятый взгляд на аксиомы претерпел самые решительные изменения. Важным этапом в процессе эволюции этих взглядов явилось построение во второй половине XIX века различных моделей неевклидовой геометрии. Оказалось, что терминам, входящим в аксиомы, и самим аксиомам можно придавать различный смысл, а не только тот наглядный, который имел в виду Евклид.

При аксиоматическом построении математических теорий обычно считается, что правила логики нам известны, и мы умеем интуитивно пользоваться ими. Аксиоматические теории, в которых правила логики явно не заданы, называются *неформальными* или *интуитивными*. При построении некоторой интуитивной аксиоматической теории придерживаются следующих этапов:

1) Задается некоторое множество понятий (терминов) называемых *первичными* или *основными*.

По сути дела на этом этапе выделяется одно или несколько множеств объектов теории и соответствий между ними. Например, приводя описание геометрии, Евклид рассматривал в качестве первичных понятия «точка», «прямая» и «лежать на». Последнее из понятий характеризовало некоторое соответствие между точками и прямыми.

В свое время Евклид сделал попытку строго определить все первичные понятия геометрии (точку, прямую, плоскость и т. д.). Ясно, однако, что эти понятия должны определяться через какие-то другие, те, в свою очередь, сами должны определяться через какие-то понятия, и так далее. Поэтому некоторые понятия приходится считать первичными и не давать им никаких определений. Все свойства первичных понятий, которыми можно пользоваться в аксиоматической теории, описываются в аксиомах.

*Точка есть то, часть чего есть ничто.  
Определение точки по Евклиду  
Точка есть то, что под этим понимает каждый не испорченный образованием человек.  
Современное определение точки*

Неопределяемость первичных понятий объясняется попросту тем, что попытка все определять приводит либо к регрессу в бесконечность; (процесс последовательных определений никогда не оканчивается), либо к порочному кругу (ситуация при которой в результате конечного числа последовательных шагов понятие определяется через само себя).

2) Выделяется некоторое подмножество высказываний о первичных понятиях. Эти высказывания называют *аксиомами*.

С аксиомами возникает ситуация аналогичная с утверждениями относительно первичных и определяемых понятий. Невозможно доказать все справедливые утверждения об этих понятиях. При доказательстве любого утверждения нужно опираться на какие-то предыдущие утверждения, при их доказательстве, в свою очередь, - на следующие, и так без конца. Поэтому и здесь необходимо выделить некоторые утверждения и объявить их справедливыми в данной теории. В качестве таких утверждений, принимаемых без доказательства, выбираются аксиомы.

Вопрос о том, какие утверждения о первичных понятиях выбираются в качестве аксиом, заслуживает специального рассмотрения. Отметим только, что Евклид в качестве пяти своих аксиом (постулатов) выбрал наиболее, на его взгляд, очевидные утверждения о точках и прямых.

3) При помощи первичных понятий даются определения всех остальных понятий.

Как отмечалось выше, первичные понятия аксиоматической теории не определяются. Вместе с тем, все другие понятия, которые предполагается использовать в теории, должны быть строго определены через первичные неопределяемые понятия и через понятия, смысл которых был определен раньше. Высказывание, определяющее таким способом значение понятия, называется *определением,* а само понятие, смысл которого определен, носит название *определяемого понятия.*

4) На основе аксиом и определений чисто логическим путем выводятся новые утверждения о первичных и определяемых понятиях. Получаемые новые утверждения называются *теоремами* данной аксиоматической теории.

Можно более точно сформулировать понятие теоремы аксиоматической теории. Сначала, однако, мы определим понятие доказательства. *Доказательством* или *выводом* в аксиоматической теории *T* называется конечная последовательность *В1, В2, ..., Вs* высказываний теории, в которой каждое высказывание является либо аксиомой, либо получается из предыдущих высказываний данной последовательности с помощью логических правил вывода. Высказывание *C* аксиоматической теории *T*, называется *теоремой* теории *T*, если существует вывод, в котором последним высказыванием является *C*. Тот факт, что высказывание *C* является теоремой теории *T*, обозначается символом http://ok-t.ru/img/baza5/Rab.-progr.-disc.-Mat-logika--spec.-PMI--20-1383008991.files/image002.gif*С*.

Отметим, что каждая аксиома аксиоматической теории является ее теоремой. Доказательством аксиомы является одноэлементная последовательность, состоящая из нее самой.

Важным является следующее обобщение понятия теоремы. Пусть *Г -* конечное множество высказываний некоторой аксиоматической теории. Утверждение *C* теории называется *выводимым из Г* (и обозначается *Г* http://ok-t.ru/img/baza5/Rab.-progr.-disc.-Mat-logika--spec.-PMI--20-1383008991.files/image002.gif*C*), если существует конечная последовательность высказываний *В1, В2, ..., Вs,* называемая *выводом C из Г*, каждое высказывание которой является либо аксиомой, либо высказыванием из *Г*, либо получено из одного или более предыдущих высказываний этой последовательности по какому-либо из правил вывода рассматриваемой теории, а последнее высказывание *Вs* есть утверждение *С*. Утверждения из *Г* называются *гипотезами* (или посылками, или допущениями). В частном случае, когда *Г* = Æ*,* вывод *C* из *Г* превращается в доказательство утверждения *C*, а *C* становится теоремой аксиоматической теории.

Итак, под *аксиоматической теорией,* построенной на основе системы аксиом S, понимается совокупность всех теорем, доказываемых, исходя из этой системы аксиом. Такую совокупность теорем обозначают *Th*(S).

Изложенный метод построения математической теории носит название *аксиоматического* или *дедуктивного метода.* Выбор системы аксиом условен. Одно и то же утверждение теории может быть аксиомой, если оно так выбрано, а может выступать в качестве теоремы, если выбор аксиом осуществлен по-иному. Таким образом, если в обыденной жизни за термином «аксиома» утвердился его изначальный смысл (в переводе с греческого «аксиома» означает «достойный признания»), именно смысл самоочевидной, безусловной истины, то в математике, при построении аксиоматических теорий, аксиомы условны. Они «достойны признания» не сами по себе, не ввиду их самоочевидной истинности, а потому что на их основе строится та или иная аксиоматическая теория. При новом выборе системы аксиом прежние аксиомы становятся теоремами. Коротко говоря, аксиомы - это то, из чего выводятся теоремы, а теоремы - то, что выводится из аксиом.

|  |
| --- |
| *Через точку A, не принадлежащую прямой l, проходит единственная прямая параллельная l.* *Евклид* *Через точку A, не принадлежащую прямой l, проходит бесконечно много прямых параллельных l.* *Лобачевский, Больяи, Гаусс* *Через точку A, не принадлежащую прямой l, не проходит ни одной прямой параллельной l.* *Риман* |

Не требуется «верить» аксиомам. Даже поднимать этот вопрос и бесполезно и бессмысленно. В старых школьных учебниках геометрии бытовала фраза: «Справедливость аксиом подтверждается многовековым опытом человечества». Этот тезис с точки зрения «чистого» математика не имеет никакого смысла. В самом деле, как может «многовековой опыт человечества» (или какие угодно иные аргументы) подтвердить или опровергнуть тот факт, что для любой прямой *l* и точки *A* плоскости a(http://ok-t.ru/img/baza5/Rab.-progr.-disc.-Mat-logika--spec.-PMI--20-1383008991.files/image004.gif) в плоскости a существует единственная прямая, проходящая через точку *A* и не пересекающая прямую *l*. Данный факт представляет собой всего лишь условное соглашение, и никакой проверке его истинность не подлежит.

Для построения геометрии Евклид в качестве одной из аксиом выбрал первое из перечисленных предложений и развил на этой основе стройную аксиоматическую теорию, названную впоследствии евклидовой геометрией. Однако, если заменить предложение Евклида на любое из двух других предложений, можно построить другие не менее стройные аксиоматические теории.